226. 擴大サレタ環ニツイテ

森 新治郎（廣島文理大）

本紙第17号ニ秋月氏ガ Bewertungstheorie ヲ用ヒナイデ Krull ノ定理ヲ証明サレマシタ。ソレデ私ハソノ方法ヲ変ヘテ次ノ一般的ナ定理ヲ証明シテ見マシタ。

$\mathfrak{R}$ ヲ任意ノ環トシ、コレカラ商環 $\bar{\mathfrak{R}}$ ヲ作ル。$\bar{\mathfrak{R}}$ ノ元素ノ内デ $\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ （a：$\mathfrak{R}$ ノ元素）ナル式ヲ満足スル元素 α ノ集合ハ一ツノ環デアル。コノ環ヲ $\mathfrak{R}^*$ デ表ハスコトニスル。

〔定理〕 $\mathfrak{R}$ ニ reguläres Ideal $\mathfrak{a}$ $(\neq(0))$ ガ存在スルナラバ剰余環 $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ニ於テ倍鎖律ガ成立スルモノトスル。ソノ上 $\mathfrak{R}$ ノ reguläres Primideal ノ内 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_k$ ナル有限個ヲ除ケバ他ハ全部 Hauptideal デアルナラバ $\mathfrak{R}^*$ ノ reguläres Ideal $\mathfrak{a}^*$ $(\neq(0))$ ニ對シテ $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{a}^*$ ニ於イテ常ニ倍鎖律ガ成立スル。

$\mathfrak{R}$ ハ Hauptideal デナイ reguläres Primideal ヲ持ツトシテ先ヅ次ノ関係ヲ証明シヨウ。

(I) d ヲ $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_k$ ノ各々ニ含マレテヰル regulär ナル任意ノ元素トスレバ $\mathfrak{R}^*$ ノ任意ノ元素 α ハ常ニ $\alpha = \frac{a}{d^n}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ニテ表ハサレル。コヽニ a ハ $\mathfrak{R}$ ノ元素ヲ示ス。

定理ニ述ベタ假定カラ d ヲ含ム Primideal $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots\cdots \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k+1}, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_m$ ハ有限個デ然モ皆最大 Ideal デアル。今 $\mathfrak{v} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_{k+1}, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_m]$ トスレバ d ハ $\mathfrak{v}$ ノ元素デアッテ他ノ Primideal ニハ決シテ含マレナイ。

$\mathfrak{R}^*$ ノ定義カラ、ソノ元素 α ハ $\alpha = \frac{a}{b}$ デ表ハサレ分母 b ハ regulär デアル。コノ分母子ニ適當ナ reguläres Element ヲ乗ズレバ、ソノ分母ハ $\mathfrak{v}$ ニ含マレルコトニナル。故ニ b ハ $\mathfrak{v}$ ノ元素ト見テ差支ナイ。若シ b ガ $\mathfrak{p}_1 \cdots\cdots \mathfrak{p}_k, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_m$ 以外ノ Primideal $\mathfrak{p}$ ニ含マレルナラバ $\mathfrak{p}$ ハ Hauptideal ダカラ $\mathfrak{p} = (p)$ デアリ、p ハ regulär ダ。従ッテ

$$b = p(b_1 + n_1) \qquad (n_1: \text{整数};\ b_1: \mathfrak{R}\ \text{ノ元素})$$

トナル。

$\mathfrak{R}/(b)$ ニ於テハ倍鎖律ガ成立スルカラ

$$p^s = r' p^{s+l} + b(b_s + n_s) \qquad (s, l: \text{正整数};\ n_s: \text{整数})$$

今 b ハ $\mathfrak{p}$ ノ任意ノ冪ニ含マレルト假定スレバ

$b=p^{s+l}(b'+n')$ トナリ、上ノ関係ト結ビツクレバ $p^s=r'p^{s+l}+p^{s+l}(b_s+n_s)(b'+n')$ 然ルニ p ハ regulär ダカラ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ元素 r ニ對シテ常ニ $r\equiv 0(\mathfrak{p})$ ナル矛盾ヲ生ズ。依ッテ

(1) $b=p^s(b''+n'')$, $b\not\equiv 0(\mathfrak{p}^{s+1})$

ナル正整数 s が存在スル。剰餘環 $\mathfrak{R}/(p^{s+1})$ ニハ單位元素 e' が存在シ、$dd'\equiv e'((p^{s+1}))$ トナルカラ今 $dp^s(b''+n'')\equiv 0((p^{s+1}))$ ト假定スレバ $p^s(b''+n'')=p^{s+1}(b'''+n''')$ トナッテ (1) ト矛盾スル。故ニ

(2) $bd=p^s d_1$, $d_1=d(b''+n'')\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, $d_1\equiv 0(\mathfrak{v})$.

又 $\mathfrak{p}$ ハ Primideal ダカラ任意ノ正整数 n ニ對シテ常ニ

$$bd^{n+1}=p^s d^n d_1\not\equiv 0(\mathfrak{p}^{s+1}).$$

然ルニ α ハ $\alpha^n+a_1'\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_n'=0$ (a': $\mathfrak{R}$ ノ元素) ヲ満足スルカラ

(3) $\alpha=\dfrac{a_1}{b_1}$, $b_1\not\equiv 0(\mathfrak{p})$, $b_1\equiv 0(\mathfrak{v})$.

ヲ得ル。ソシテ b_1 ハ d_1 ト d ノアル冪トノ積ダカラ b ヲ含ム Primideal ヨリ以外ノ Primideal ニ含マレルコトナシ。コノ様ナ考ヘカラシテ b_1 ハ $\mathfrak{p}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_k,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_m$ 以外ノ Primideal ニハ決シテ含マレナイトシテヨイ。

d ハ regulär ダカラ $\mathfrak{R}/(d)$ ニ倍鎖律が成立シテ

(4) $b_1^t=dd_2$ （t: 正整数）

トナル。然モ d_2 ハ $\mathfrak{p}_1$ ------ $\mathfrak{p}_k$, ------, $\mathfrak{p}_m$ 以外ノ Primideal ニハ含マレナイ。従ッテ又

$$(5) \qquad d^{\ell} = (d_2 d) . d_3 \qquad (\ell : \text{正整数})$$

ヲ得ル。故ニ (3), (4), (5) カラ

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 b_1^{t-1}}{b_1^{t}} = \frac{a_1 b_1^{t-1}}{d d_2} = \frac{a_1 b_1^{t-1} d^{\ell}}{d^{\ell} d d_2}$$

$$= \frac{a_1 b_1^{t-1} d_3}{d^{\ell}} = \frac{a_2}{d^{\ell}}$$

コヽニ a_2 ハ明ニ $\mathfrak{R}$ ノ元素デアルカラ (I) ハ証明サレタ。

(II) $\mathfrak{n}^*(\neq(0))$ ヲ $\mathfrak{R}^*$ ノ reguläres Ideal トスレバ剰餘環 $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{n}^*$ ニ於テ倍鎖律ガ成立スル。

(I) ニ於テ得タ結果ヲ用ヒテ拙著(廣島文理大紀要第五巻第三号、頁 137—138.)ニ述ベタ方法ニヨツテコレヲ証明シ得ル。

最後ニ $\mathfrak{R}$ ノ reguläres Primideal ガ皆 Hauptideal ナル場合ヲ考ヘネバナラヌ。

(a) 任意ノ reguläres Ideal $\mathfrak{n}(\neq(0))$ ニ對シテ $\mathfrak{R}/\mathfrak{n}$ ガ常ニ單位元素ヲ有スルトキハ $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^*$ トナル。

(b) $\mathfrak{R}/\mathfrak{n}$ ガ單位元素ヲ有シナイトキハ $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^*$ トナルカ又ハ前ノ場合ト同様ニシテ定理ノ成立ヲ証明シ得ル。

$\mathfrak{R}$ ニ單位元素ガ存在スレバ証明ハ簡單ニナリマス。

以上ノ説明ニ不充分ナ点モアリマセウシ尚 $\mathfrak{R}^*$ ノ色々ノ問題モアリマスガ、コレハ他日ニ残スコトヽ致シマス。